

第15回統計教育の方法論ワークショップ
2018年7月7日(土) 京都テルサ

生徒の活動を重視した統計的推測の授業実践

広島大学附属中・高等学校
数学科 橋本 三嗣



広島大学

実践報告

① 「同じ誕生日のペア」(高1)

クラスの中に同じ誕生日のペアがいるという現象がどの程度起こりうるのか、確率から判断する。

② 「平均点と偏差値」(高1)

2つのクラスの数学のテスト結果から、ともに80点の生徒がいることがわかっている。その状況で、80点が平均点と偏差値からどんなことがいえるか検討する。

③ 「マグロとイワシ」(高2)

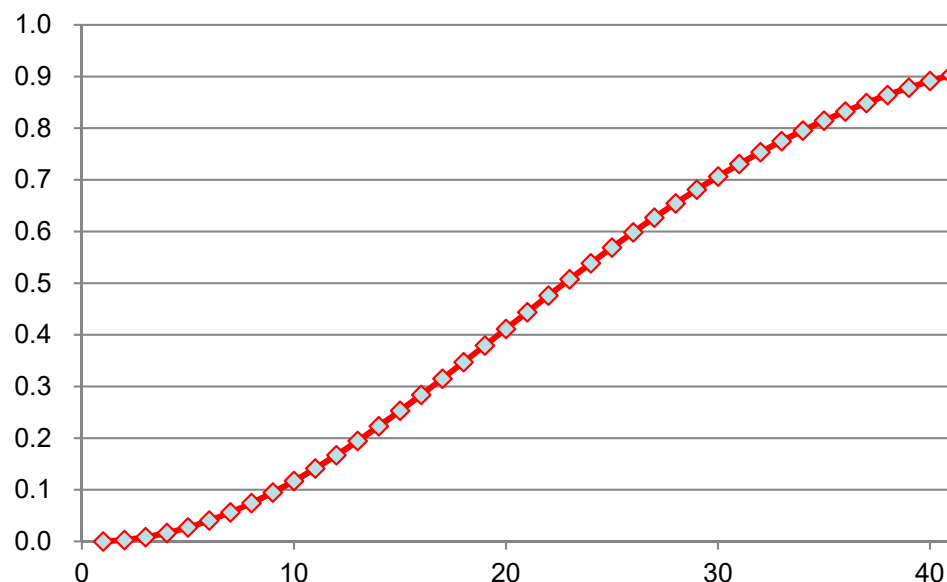
捕食者(食う)と被食者(食われる)の関係にあるマグロとイワシの個体数について、数理モデル(ロトカーヴォルテラの方程式)を利用して数値解析を行う。

実践①「同じ誕生日のペア」(高1)

人数	選び方	選び方／365	ペアがない確率	ペアがある確率
1	365	1	1	0
2	364	0.9973	0.9973	0.0027
3	363	0.9945	0.9918	0.0082
4	362	0.9918	0.9836	0.0164
5	361	0.9890	0.9729	0.0271
6	360	0.9863	0.9595	0.0405
7	359	0.9836	0.9438	0.0562
8	358	0.9808	0.9257	0.0743
9	357	0.9781	0.9054	0.0946
10	356	0.9753	0.8831	0.1169
11	355	0.9726	0.8589	0.1411
12	354	0.9699	0.8330	0.1670
13	353	0.9671	0.8056	0.1944
14	352	0.9644	0.7769	0.2231
15	351	0.9616	0.7471	0.2529
16	350	0.9589	0.7164	0.2836
17	349	0.9562	0.6850	0.3150
18	348	0.9534	0.6531	0.3469
19	347	0.9507	0.6209	0.3791
20	346	0.9479	0.5886	0.4114
21	345	0.9452	0.5563	0.4437
22	344	0.9425	0.5243	0.4757
23	343	0.9397	0.4927	0.5073
24	342	0.9370	0.4617	0.5383
25	341	0.9342	0.4313	0.5687
26	340	0.9315	0.4018	0.5982
27	339	0.9288	0.3731	0.6269
28	338	0.9260	0.3455	0.6545
29	337	0.9233	0.3190	0.6810
30	336	0.9205	0.2937	0.7063
31	335	0.9178	0.2695	0.7305
32	334	0.9151	0.2467	0.7533
33	333	0.9123	0.2250	0.7750
34	332	0.9096	0.2047	0.7953
35	331	0.9068	0.1856	0.8144
36	330	0.9041	0.1678	0.8322
37	329	0.9014	0.1513	0.8487
38	328	0.8986	0.1359	0.8641
39	327	0.8959	0.1218	0.8782
40	326	0.8932	0.1088	0.8912
41	325	0.8904	0.0968	0.9032

予想→実験→確率の計算→確率の分布を調べる

ペアがある確率の分布



(生徒の感想)

- ・人数が増えるにしたがって、確率も増加する。
- ・グラフから確率が0や1に近いところは確率の変化がなだらかになっている。確率が9割こえると偶然とは言い難いと思います。

実践②「平均点と偏差値」(高1)

A組

83	95	55	59	64	88	94	66
62	92	72	74	77	76	59	67
55	64	66	88	40	65	89	48
53	67	85	80	58	64	79	80
70	34	53	98	28	88	96	69

B組

62	67	81	48	68	66	80	86
74	79	60	72	54	66	84	90
68	64	68	70	72	48	88	86
83	58	74	82	64	78	78	88
55	77	77	66	80	76	68	75

平均点で評価すると・・・

「A組の平均点は70点、B組の平均点は72点であるから、同じ80点でも、A組の方が平均点が低いため、A組の方が価値がある。」

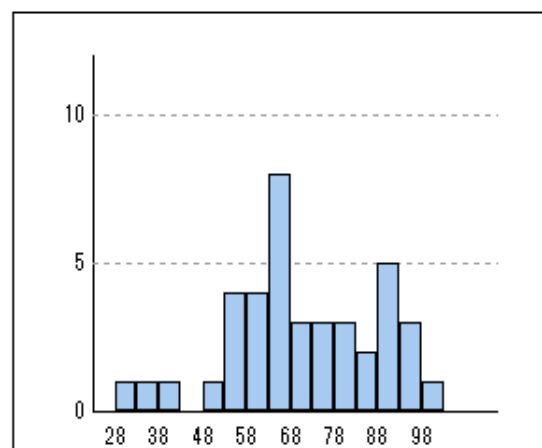
偏差値で評価すると・・・

「80点の偏差値は、A組で55.9(標準偏差16.9)、B組で57.5(標準偏差10.7)となったから、偏差値はB組の方が高いから、平均点のときと結論が逆になる。」

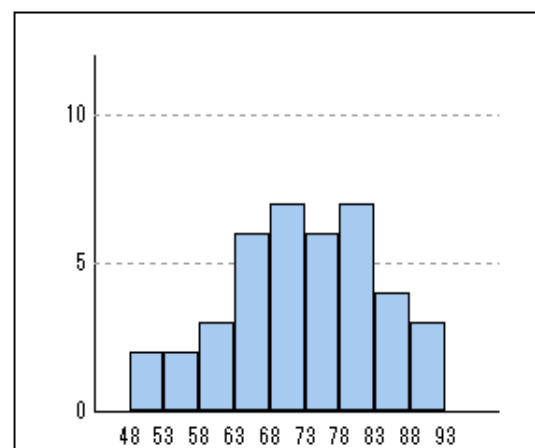
実践②「平均点と偏差値」(高1)

点数の分布を調べてみよう

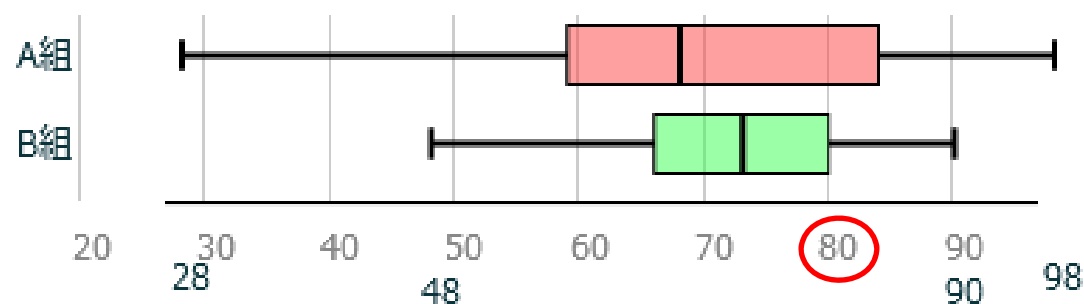
A組



B組



得点の分布



A組では上位25%に入らないが、B組では入る

生徒の感想

- 平均点で比べるとクラスの平均値からどれだけ離れているのかがわかり、偏差値で比べるとクラスのどの位置(上位どれぐらい)にいるのかがわかりました。
- グラフの形が山型になっているときは、平均点との差が標準偏差1つ分、2つ分でどの位置にいるのかがわかります。
- エクセルに詳しい人が検定をして「2クラスの平均点には差がない」と言っていましたが、この場合は2クラス全員の点数があるからあまり意味がないと思いました。

数理モデリングと数理モデル

数理モデリングとは、「自然現象や社会現象にみられる数量の推移を数学的に表現する方法」である。また、数理モデリングで得られた数式を数理モデルと呼ぶ。

①ネズミの増え方を表現する漸化式

1匹のネズミが1週間あたり3匹の子どもを産むとする。n週間後のネズミの数を $\{a_n\}$ とすると、 $a_{n+1}=4a_n$

②ウサギの増え方を表現する漸化式

1羽の親ウサギは1ヶ月あたり1羽の子ウサギを産み、子ウサギは1ヶ月で親ウサギに成長するとする。nヶ月後のウサギの数を $\{a_n\}$ とすると、 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

<授業スライド>

「食う・食われる」を記述する 数理モデル

オオヤマネコ(lynx)



肉食, 視覚が鋭い

春のユキウサギ (*Lepus timidus*)



草食、かわいい、寂しいと死ぬというのはウソ

冬のユキウサギ



サン・ピエール: カナダのローレンス湾に浮かぶフランスの海外準県

食う(捕食者)



食われる(被捕食者)

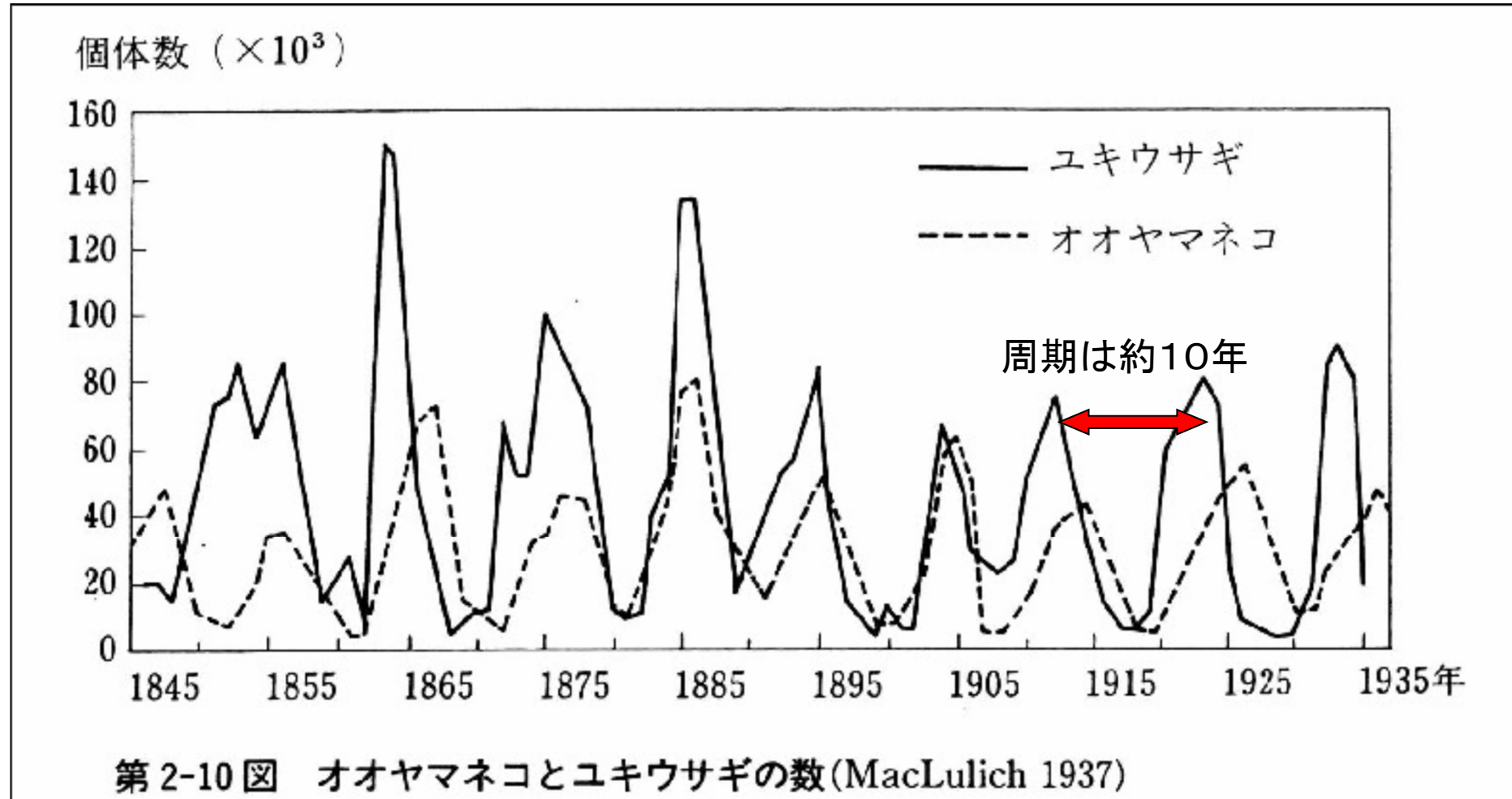


カナダオオヤマネコはユキウサギを捕食する習性がある

生物の個体数の変動は？

カナダのタイガ地域におけるオオヤマネコとユキウサギの数 広島大学

(タイガ地域: 永久凍土の上に成り立つ乾燥した大森林地域)



疑問

マグロは、実際にどれだけ減少しているのか？
マグロの個体数減少は、周期的変動の一部ではないのか？

食う(捕食者)



食われる(被捕食者)



マグロはイワシを捕食する習性がある

大前提として

どう数式で
表すか？

- ・捕食者は被食者を捕食して増える。
- ・被食者はえさを食べ増える(えさは十分な量がある)。
- ・捕食者、被食者は寿命などにより一定の割合で減少する。

マグロはどのように増えるか



イワシを1単位捕食すること
に
マグロは1単位増える

食べれば食べるほど増える

マグロがイワシに出会える機会は？



どこにイワシがいるかなあ？

A

B

C

D

E

1

2

3

4

5

仮想的海

マグロがイワシに出会える機会は？



どこにイワシがいるかなあ？

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

仮想的海

マグロがイワシに出会える機会は？

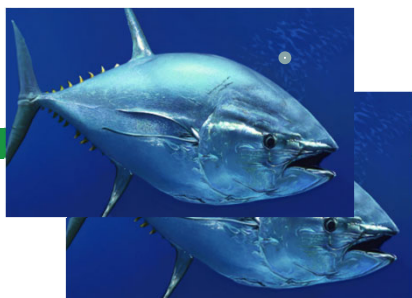


どこにイワシがいるかなあ？

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

仮想的海

イワシが多いと出会う機会也大



マグロがイワシに出会える機会は？

わしも出会いたいなあ。

どこにイワシがいるかなあ？

A

B

C

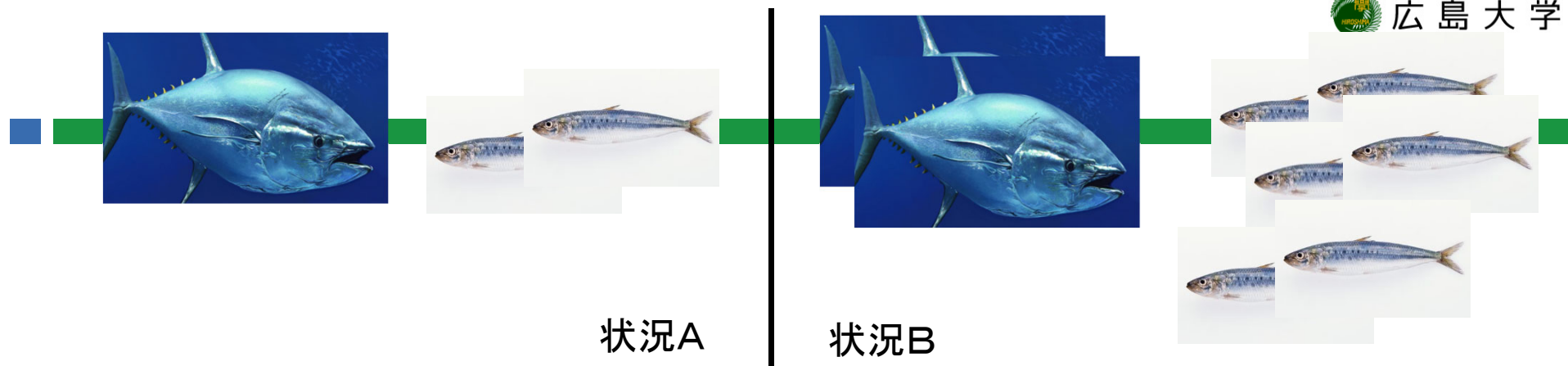
D

E

1				
2				
3				
4				
5				

仮想的海

マグロが多いと出会う機会の総数也大



マグロがイワシを食べて増えるとき

- ・イワシが多いほど単位時間あたりの増加量が多い
 - ・マグロが多いほど単位時間あたりの増加量が多い
- と仮定するのが妥当である。

逆に、イワシがマグロに食べられて減るとき

- ・イワシが多いほど単位時間あたりの減少量が多い
 - ・マグロが多いほど単位時間あたりの減少量が多い
- と仮定するのが妥当である。

「食う・食われる」の関係を記述する数理モデル (ロトカーヴォルテラ方程式)

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= p \cdot a_n \cdot b_n - q \cdot a_n \\b_{n+1} - b_n &= r \cdot b_n - s \cdot a_n \cdot b_n\end{aligned}$$

a_n : マグロの個体数

b_n : イワシの個体数

p : マグロの捕食による増加率

q : マグロの減少率

r : イワシの増加率

s : イワシの被食による減少率

実践③「マグロとイワシ」

〔課題〕

マグロの漁獲量が減少していることへの対策として、マグロの稚魚を放流し、マグロの数を増やそうという取り組みがなされています。このことについて、ロトカーヴェルテラ方程式を用いたシミュレーションを分析して自分の意見を述べなさい。また、その意見をもとにしてグループで議論し、グループでの見解をまとめなさい。

○ロトカーヴォルテラ方程式

捕食者（マグロ）と被食者（イワシ）の個体数をそれぞれ数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で表す。

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + p \cdot a_n \cdot b_n - q \cdot a_n \\ b_{n+1} = b_n + r \cdot b_n - s \cdot a_n \cdot b_n \\ a_1 = a, b_1 = b \end{cases} \quad (a, b, p, q, r, s \text{ は負でない定数})$$

において、 p, q の値を変化させて、それぞれの場合において数列の挙動がどのように変化するか調べよう。

○ q の値を 0.000 から 0.001 刻みで徐々に大きくしていくとき、数列の挙動がどのように変化するか調べよ。ただし、 $a=5, b=5, p=0.001, r=0.01, s=0.001$ とする。

数値実験

マグロの初期値	a_1	5.000					
イワシの初期値	b_1	5.000					
マグロの増加に関する係数	p	0.100					
マグロの減少に関する係数	q	0.100					
イワシの増加に関する係数	r	0.100					
イワシの減少に関する係数	s	0.100					
	n	a_n	b_n				
	1						

- ①初期値の入力
・緑のセルに初期値を参照する

マグロの初期値	a	5.000					
イワシの初期値	b	5.000					
マグロの増加に関する係数	p	0.100					
マグロの減少に関する係数	q	0.100					
イワシの増加に関する係数	r	0.100					
イワシの減少に関する係数	s	0.100					
	n	a_n	b_n				
	1	5.0000	5.0000				
	2						

- ②式の入力
・続く緑のセルに式をうちこむ
・うちこんだら”ひっぱる”
・絶対参照に注意

ロトカ・ヴォルテラ方程式
 $a_{n+1}=a_n+p*a_n*b_n-q*a_n$
 $b_{n+1}=b_n+r*b_n-s*a_n*b_n$

マグロの初期値	a	5.000					
イワシの初期値	b	5.000					
マグロの増加に関する係数	p	0.100					
マグロの減少に関する係数	q	0.100					
イワシの増加に関する係数	r	0.100					
イワシの減少に関する係数	s	0.100					
	n	a_n	b_n				
	1	5.0000	5.0000				
	2	7.0000	3.0000				

- ③グラフにする
・a_n, b_nの2列の全データをドラッグして,
「挿入」→「グラフ」→「折れ線」

数値実験

D11 : fx $=D10+\$D\$4*D10*E10-\$D\$5*D10$

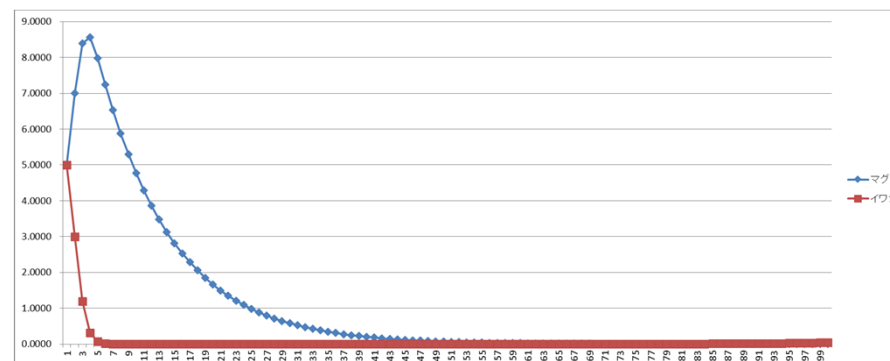
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		マグロの初期値	a	5.000				
3		イワシの初期値	b	5.000				
4		マグロの増加に関する係数	p	0.100				
5		マグロの減少に関する係数	q	0.100				
6		イワシの増加に関する係数	r	0.100				
7		イワシの減少に関する係数	s	0.100				
8								
9			n	a _n	b _n			
0			1	5.0000	5.0000			
1			2	7.0000	3.0000			
2			3	8.4000	1.2000			
3			4	8.5680	0.3120			
4			5	7.9785	0.0759			
5			6	7.2412	0.0229			

④グラフにする
・できました。しかし、個体数が負になっています。

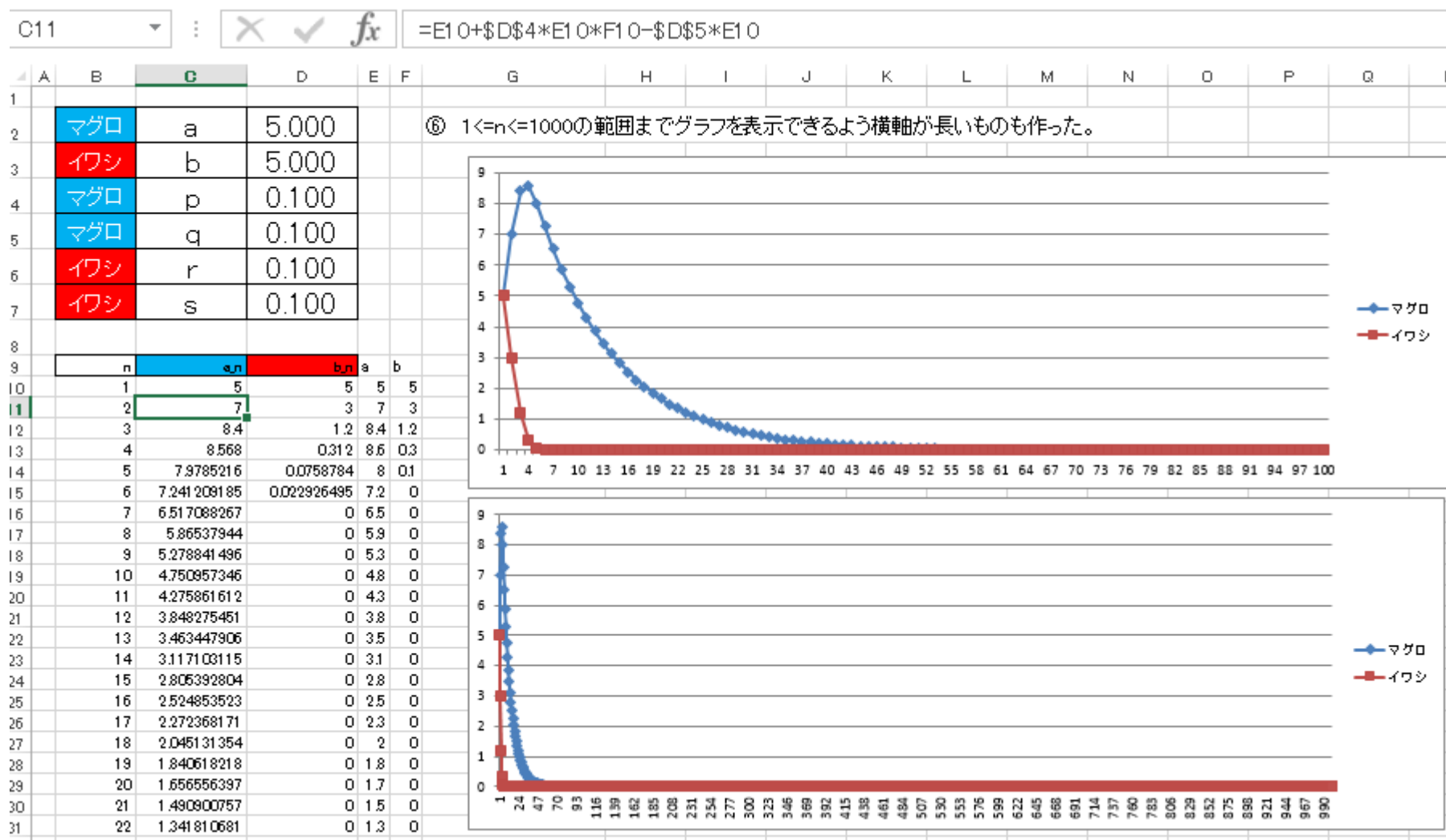
E10 : fx $=IF(C10>\$D\$2*0.01,C10,0)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2		マグロ	a	5.000					
3		イワシ	b	5.000					
4		マグロ	p	0.100					
5		マグロ	q	0.100					
6		イワシ	r	0.100					
7		イワシ	s	0.100					
8									
9			n	a _n	b _n	a	b		
0			1	5	5	5	5		
1			2	7	3	7	3		
2			3	8.4	1.2	8.4	1.2		
3			4	8.568	0.312	8.6	0.3		
4			5	7.9785216	0.0758784	8	0.1		
5			6	7.241209185	0.022926495	7.2	0		
6			7	6.517088267	0	6.5	0		

⑤負の値は0にるように修正。



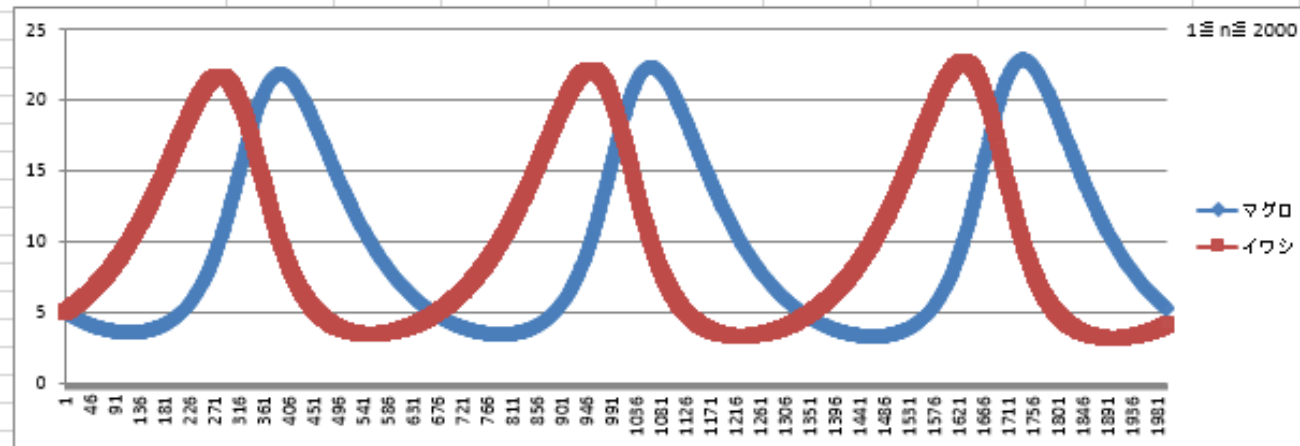
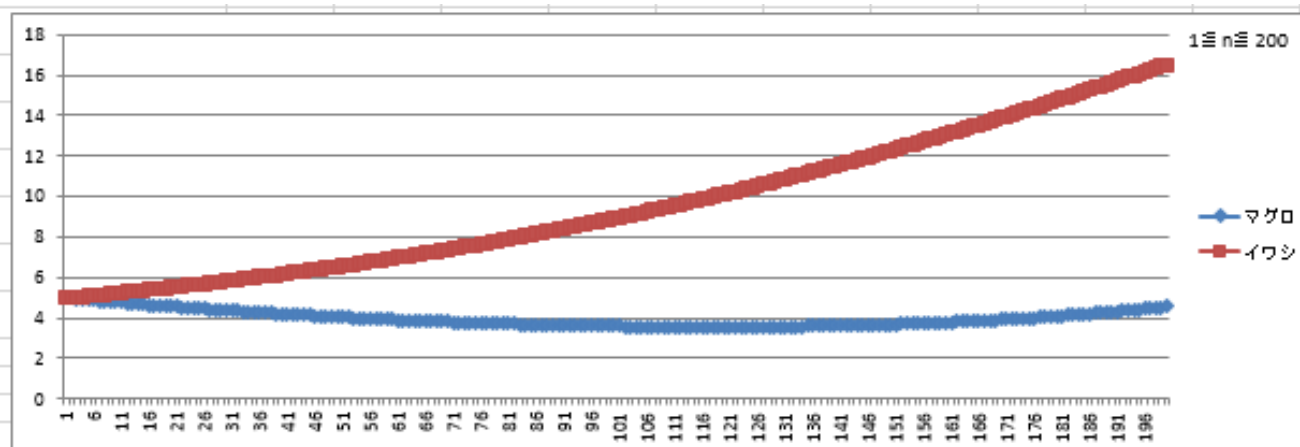
数値実験



数値実験

マグロ	a	5.000
イワシ	b	5.000
マグロ	p	0.001
マグロ	q	0.010
イワシ	r	0.010
イワシ	s	0.001

n	a_n	b_n	a	b
1	5	5	5	5
2	4.975	5.025	5	5
3	4.950249375	5.050250625	5	5.1
4	4.925746881	5.075753119	4.9	5.1
5	4.901491288	5.101508712	4.9	5.1
6	4.877481376	5.127518624	4.9	5.1
7	4.85371594	5.153784656	4.9	5.2
8	4.830193787	5.180307513	4.8	5.2
9	4.806913738	5.207088711	4.8	5.2
10	4.783874627	5.234129572	4.8	5.2
11	4.761075301	5.261431448	4.8	5.3
12	4.738514619	5.288995691	4.7	5.3
13	4.716191456	5.316823665	4.7	5.3
14	4.6941047	5.344916743	4.7	5.3
15	4.672253252	5.373276312	4.7	5.4
16	4.650636027	5.401903767	4.7	5.4
17	4.629251955	5.430800617	4.6	5.4
18	4.608099979	5.459967978	4.6	5.5
19	4.587179058	5.489407579	4.6	5.5
20	4.566488163	5.51912076	4.6	5.5



生徒の感想

- 実際の場面に数学が利用されていることがわかりました。特に漸化式は有効だと思いました。
- 過去のデータから傾向を読み取ることで、未来を予想することができます。また、予想と現実が違えば何が原因かを調べることができ、新たな発見が生まれる可能性があると思いました。
- 単純化することで、自然現象を説明する法則を見つけたいと思いました。
- 話し合いを通して、自分では思いつかなかったことに気づくことができました。

(参考) 自然現象と数理モデリング

①風邪の罹患者の推移

②マルサス型の式 $a_{n+1} = ra_n$

③ロジスティック式

$$a_{n+1} = a_n + r_0 \cdot a_n \left(1 - \frac{a_n}{K} \right) \quad , \quad a_1 = a$$

④数値解析

⑤数学的な解析

⑥ロジスティック方程式を用いた自然現象の解析

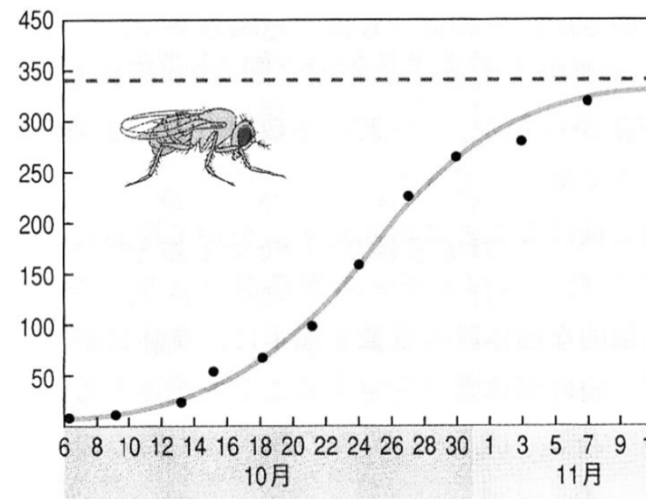
文字を利用して法則性を表現する活動は、表現の方法を学ぶことに留まらず、見方や考え方を育成できる。

グラフから分布を把握することで、現象についての理解が深まる。

レポート課題 ロジスティック方程式による現象の再現

〔課題1〕

下の図は、ロジスティック方程式によく適合した個体数変化を示している、ショウジョウバエの育成実験の結果である。この実験では温度、湿度、餌、空間的条件などの育成条件は一定に保たれている。



・ (R.Pearl, Q.Rev.Boil.,2,532(1927)より)

問1 この実験結果をロジスティック方程式で再現することで、実験の r_0 と K の値を求めよ。ただし、単位時間を1日とすること。

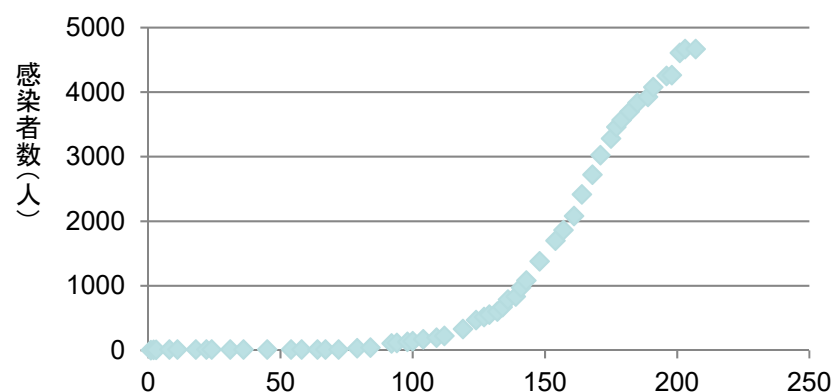
問2 同じ条件下で50匹から育成を始めたとき、200匹に達するには約何日かかると予想されるか。

☆実験を数理モデルで再現することにどのような価値があるか記述せよ。

レポート課題 ロジスティック方程式による現象の再現

〔課題2〕

下の図は2014年3月にリベリアで発生したエボラ出血熱の、発生からの約200日目までの経過日数と感染者数の推移である。



(データはwikipedia“2014年の西アフリカエボラ出血熱流行”より参照した)

- 問1 この実験結果をロジスティック方程式で再現することで、実験の r_0 と K の値を求めよ。ただし、単位時間を1日とすること。
- 問2 累積感染者数がどのような推移をたどるか予想し、300日目の感染者数を求めよ。
- 問3 エボラ出血熱の感染を、ロジスティック方程式を用いて再現することは適切であるか。ポジティブな側面とネガティブな側面の両面から考えよ。

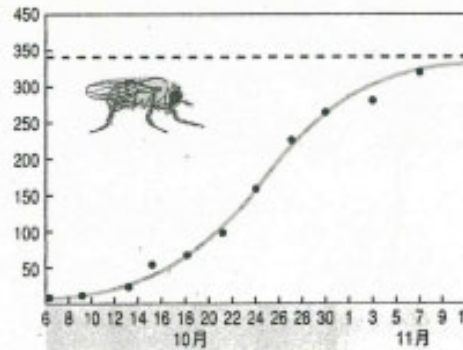
提出されたレポート

現象数理解析 レポート課題 ロジスティック方程式による現象の再現 C

Ⅱ年 3組 番 名前 ()

課題 1

下の図は、ロジスティック方程式によく適合した個体数変化を示している、ショウジョウバエの育成実験の結果である。この実験では温度、湿度、餌、空間的条件などの育成条件は一定に保たれている。



(R. Pearl, Q. Rev. Biol., 2, 532 (1927) より)

問 1 この実験結果をロジスティック方程式で再現することで、実験の r_0 と K の値を求めよ。ただし、単位時間を 1 日とすること。

最大値から $K = 340$

また 30日と320(50)を代入 $r_0 = 0.235$ と計算 $(a_1 = 7.73)$

問 2 同じ条件下で 50 匹から育成を始めたとき、200 匹に達するには約何日かかると予想されるか。

11日目で200匹を越えたと

10~12日くらいかかると思われる

☆実験を数理解析モデルで再現することにどのような低値があるか記述せよ。

変化の大きな流れで比較的容易に推定できる

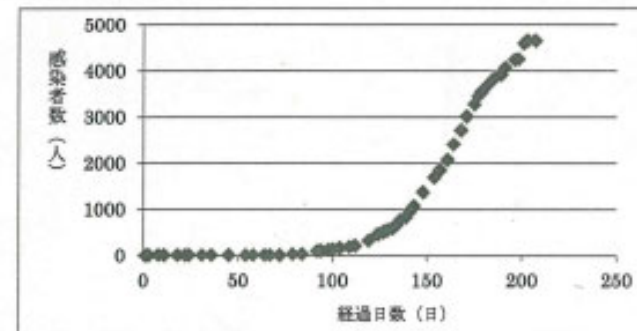
ただし、今までになかったことでは当然分からないし、生き物の力は

凄まじいので、何が起るか分からない

所詮は机上の空論である

課題 2

下の図は 2014 年 3 月にリベリアで発生したエボラ出血熱の、発生からの約 200 日目までの経過日数と感染者数の推移である。



(データは wikipedia “2014 年の西アフリカエボラ出血熱流行” より参照した)

問 1 この実験結果をロジスティック方程式で再現することで、実験の r_0 と K の値を求めよ。

ただし、単位時間を 1 日とすること。

最大値から $K = 5000$

また、データから外れ値の有無を確認する

正しい数字は 11

また 207日と4465より $r_0 = 0.051$ と思われる

$(a_1 = 2.73)$

問 2 累積感染者数がどのような推移をたどるか予想し、300 日目の感染者数を求めよ。

このまま感染者数は増加する

4900人を超えたあたりから増加率は低くなり、300日目は5000人に近づくと思われる

問 3 エボラ出血熱の感染を、ロジスティック方程式を用いて再現することは適切であるか。

ポジティブな側面とネガティブな側面の両面から考えよ。

・ポジティブ

あまり時間をかけずに大まかな変化を推定できる

現実には起こらないこと、まだ起こっていないことを推定できる

・ネガティブ

所詮はシミュレーションなので、それ以外の予測にはあまり

これに基いて対策がとれるわけではない