

高等学校数学科における新内容「仮説検定の考え方」の扱いと今後の展望

塩澤友樹・岐阜聖徳学園大学教育学部

〒501-6194 岐阜県岐阜市柳津町高桑西 1-1

1. はじめに

平成 30 年告示高等学校学習指導要領では、数学 B で 30 年ぶりに「仮説検定」、数学 I で初めて「仮説検定の考え方」が扱われることになった。「仮説検定の考え方」の導入については同解説数学編理数編(以下、新解説数学編)で次のように述べられている。

「データの分析」では、四分位数など(箱ひげ図を含む。)を中学校に移行して、「仮説検定の考え方」を取り扱うこととした。仮説検定については「数学 B」の「統計的な推測」で取り扱うが、この科目の履修だけで高等学校数学の履修を終える生徒もいることから、実際の場面を考慮し、具体例を通して「仮説検定の考え方」を直観的に捉えさせるようにした(新解説数学編, p.11)

したがって、数学 I では「仮説検定の考え方」を、具体例を通して直観的に理解させることをねらいとしている。また、新解説数学編 p.48 では、新素材の枕効果をコイン等の実験を通して検証すること(以下、新素材枕問題)が例示され、具体的な仮説棄却の方法については「相対度数」に基づく方法と「平均値 ± 2 標準偏差(± 3 標準偏差)」に基づく方法(以下、標準偏差による判断)が示された¹⁾。

しかし、正規分布が数学 B で扱われることを考慮すると、正規分布を扱わずに「標準偏差による判断」を扱うことがで

きるのか、また相対度数に基づき、仮説を判定する場合、帰無仮説を棄却する基準をどうするかといった課題が想定される。

そこで、本稿では、高等学校学習指導要領における「統計的な推測」内容の変遷及び統計教育先進国であるアメリカの国家カリキュラムにおける仮説検定の扱い方について整理する。そして、「仮説検定の考え方」を題材としたアメリカの教科書教材を参考に、日本で新たに「仮説検定の考え方」を扱う上での留意点と今後の展望について明確にすることを目的とする。

2. 「統計的な推測」内容の変遷と「数学一般」の教科書における「標準偏差による判断」の扱い

(1) 高等学校学習指導要領における「統計的な推測」内容の変遷

教育課程の基準としての性格が明確化したのは、昭和 33 年告示小学校及び中学校学習指導要領からである。そこで、国立政策教育研究所(2014)を参考に、それ以降の高等学校の指導内容に着目し「統計的な推測」内容について整理すると、表 1 のようになる。表 1 では、用語「二項分布」、「正規分布」、「推定」、「検定」を含む項目及びこれらを含まないが、関連すると判断できる項目を抽出した。

表 1 より、昭和 45 年告示高等学校学習指導要領以前は 3

表 1 高等学校学習指導要領における「統計的な推測」内容の変遷

昭和 35 年告示	昭和 45 年告示	昭和 53 年告示	平成元年告示	平成 11 年告示	平成 21 年告示
「数学IIA」 イ 統計 (イ)推測統計の考え方 母集団、標本、標本調査	「数学一般」 (4) 不確定な事象のとりえ方 イ 簡単な標本調査 「数学IIA」 (1) 確率と統計 イ 統計的な推測の考え方 「数学III」 (1) 確率分布 ウ 二項分布、正規分布 エ 用語および記号 二項分布、正規分布、標本、母集団、標本調査、抜き取り検査、品質管理	「確率・統計」 (4) 確率分布 イ 二項分布、正規分布 (5) 統計的な推測 イ 統計的な推測の考え [用語・記号] 推定、検定	「数学B」 (3) 確率分布 イ 確率分布 (イ)二項分布 「数学C」 (4) 統計処理 イ 統計的な推測 (イ)正規分布 (ウ)統計的推測の考え [用語・記号] 推定	「数学C」 (3) 確率分布 イ 確率分布 (イ)二項分布 (4) 統計処理 ア 正規分布 (イ)正規分布 イ 統計的な推測 (イ)統計的な推測の考え [用語・記号] 推定	「数学B」 (1) 確率分布と統計的な推測 ア 確率分布 (イ)二項分布 イ 正規分布 ウ 統計的な推測 (イ)統計的な推測の考え
「数学III」 ウ 分布 (イ)二項分布、正規分布 エ 標本調査 乱数表にふれる 用語と記号 二項分布、正規分布、標本、母集団、標本調査、抜き取り検査、品質管理	「数学III」 (1) 確率分布 ウ 二項分布、正規分布 エ 用語および記号 二項分布、正規分布 (2) 統計的な推測 ア 統計的な推測 イ 用語および記号 推定、検定 「応用数学」 (3) 確率分布 ウ 統計的な推測の考え方 (7) 確率と統計の応用 ア 統計的な推測 イ 品質管理、抜き取り検査など				
「応用数学」 エ 二項分布、正規分布 オ 標本調査 抽出、推定、検定					

科目以上で「統計的な推測」内容が扱われており、充実していたことが分かる。また必履修科目では、昭和45年告示高等学校学習指導要領の「数学一般」のみ、「統計的な推測」内容を扱っていた。

(2) 昭和45年告示高等学校学習指導要領に基づく「数学一般」の教科書における「標準偏差による判断」

昭和45年告示高等学校学習指導要領に基づく「数学一般」の検定教科書である鍋島ほか(1973)では、第4章「不確定な事象」について、次のように構成している。

表2 鍋島ほか(1973)における「不確定な事象」単元構成

§1 簡単な事象の確率			
1 確率の意味,	2 事象と集合,	3 確率の計算,	4 期待値
§2 簡単な標本調査			
1 度数分布,	2 正規分布,	3 標本調査,	4 平均値の推定

表2の2「正規分布」の単元では、10円の硬貨を10枚、20枚、40枚と投げることを100回繰り返すことを説明し、理論分布が二項分布になる実験結果を例示する(図1)。そして、1000回、2000回実験したらどうかと投げかけ、正規分布を導入する。ただし、用語「二項分布」は用いてはいない。

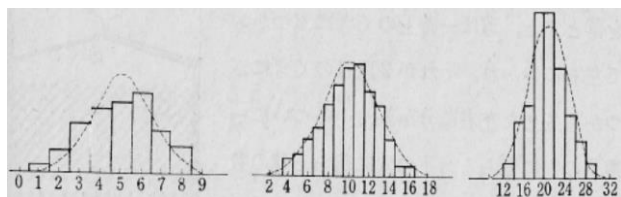


図1 実験のヒストグラム例

(鍋島ほか(1973), p.122 から引用)

そして、さらに標準偏差を σ として、正規分布における標準偏差の性質を紹介する(図2)。

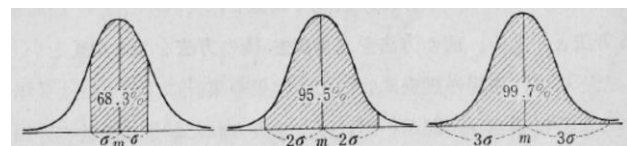


図2 正規分布における標準偏差の性質

(鍋島ほか(1973), p.123 から引用)

また、3「標本調査」では、無作為抽出だけでなく層化抽出、二段抽出を取り上げる。そして、4「平均値の推定」では、母集団からの大きさ n の標本について、標本平均 m' 、母標準偏差の代用として標本の標準偏差を σ' とし、母集団についての平均 m が信頼度95%で、次の式で推定できることを扱う²⁾。

$$m' - \frac{2\sigma'}{\sqrt{n}} \leq m \leq m' + \frac{2\sigma'}{\sqrt{n}}$$

したがって、鍋島ほか(1973)では、「仮説検定の考え方」を扱っていないものの、「標準偏差による判断」の背景を正規分布と関連付けて説明していた。

3. アメリカの国家カリキュラムにおける「仮説検定」の扱い

(1) 高等学校段階における「統計と確率」内容の概観

アメリカでは、教育は各州や地域毎に任されていた。しかし、2010年に幼稚園から12学年までを対象に英語の言語技術/リテラシーと数学の共通国家カリキュラムとして、Common Core State Standards が発表された(高橋, 2012)。Common Core State Standards Initiative(CCSSI)のCCSSI(2010a)における高等学校段階の「統計と確率」内容の概要をまとめると、表3のようになる。

表3 CCSSI(2010a)p.80 における高等学校段階の「統計と確率」内容の概要 (①～⑨は筆者が加筆)

質的データと量的データの解釈
①1つの個数あるいは測定データを要約、表現、解釈する
②2つの質的変数及び量的変数のデータを要約、表現、解釈する
③線型モデルを解釈する
推論と結論の正当化
④統計的な実験の根底にあるランダムプロセスを理解し評価する
⑤標本調査や実験、観察研究から統計的な推測を行い、結論を正当化する
条件付き確率と確率の法則
⑥独立性と条件付き確率を理解し、それらを使用してデータを解釈する
⑦確率の法則を用いて、一様な確率モデルにおける複合事象の確率を計算する
意思決定のための確率の利用
⑧期待値を計算し、それらを用いて問題を解決する
⑨確率を用いて決定の結果を評価する

表3より、「質的データと量的データの解釈」、「推論と結論の正当化」、「条件付き確率と確率の法則」、「意思決定のための確率の利用」という4つの柱で、「統計と確率」内容が構成されることが分かる。

(2) 高等学校段階における仮説検定の扱い

CCSSI(2010a)では、7学年で標本調査、8学年で2変数の相関関係を扱い、9学年以降で表3に対応する高等学校内容を扱う。「仮説検定」については、CCSSI(2010a)で用語「hypothesis (仮説)」は見当たらず、「test(検定)」は⑨に関わる説明の中で、「product testing」や「medical testing」として用いていた(p.83)。一方、用語「significant (有意な)」は、⑤の解説の中で、次のように記載された。

5. ランダム化実験から得られたデータを用いて、2つの処理を比較する: パラメーター間の差が有意であるかどうかを判断するために、シミュレーションを用いる

(CCSSI, 2010a, p.82)

さらに、CCSSI(2010a)の付録資料では、上記の補足説明として、「統計的有意性の概念は、標本抽出によるランダム選択または実験におけるランダム割り当ての結果として発生す

る可能性が低い結果を意味し、シミュレーションを通して非形式的に発達する」と加えられた(CCSSI, 2010b, p.43)。ただし、CCSSI(2010b)でも「偽陽性(False positive)」や「偽陰性(False negative)」といった「第1種の過誤」及び「第2種の過誤」に対応する用語が見つかるが、明確に仮説検定に言及してはいない。

そのため、CCSSI(2010a)では、形式的な「仮説検定」というよりはむしろ、非形式的な形でのシミュレーションを通して、統計的有意性の概念やその考え方を重視している。

4. 「仮説検定の考え方」の教科書教材例

(1) Burrill et al. (2003)の教科書教材の概要

日本では、近年、ドイ(2019)が高校2年生を対象に統計的な推測の授業実践を行った。具体的には「16人中14人が『お助けキャラクター』を選ぶことは起こりやすい結果なのかどうか」と課題を提示し、コイン投げのシミュレーションソフトを用いて解決する授業事例を紹介している。しかし、このような「仮説検定の考え方」を見据えた授業事例や教材はいまだ少ないが現状である。

そこで、2003年に全米数学教師協議会(NCTM)から発行されたBurrill et al. (2003)を参照すると、「仮説検定の考え方」の対応教材として、次のような問題が記載されている。

1972年、48人の男性の銀行管理者は、それぞれ無作為に個人ファイルが割り当てられ、ファイルの中の個人は“慣例通り”支店長としての昇進を推薦されるべきかどうか、それとも、その個人ファイルを保留して、別の候補者を面談されるべきかどうかについて判断することを求められた。そのファイルにおいて、管理者の半分は「男性」と記入され、もう半分には「女性」と記入されている点を除いては同一であった。48のファイルが審査され、そのうち35のファイルが昇進を推薦された。

(From Rosen, Benson, and Tomas H. Jerdee “Influence of Sex-Role Stereotypes on Personnel Decisions”, Journal of Applied Psychology 59 [February 1974], pp.9-14)

もし、昇進を推薦された「男性」と「女性」のフォルダーの数が分かれ、「男性」のフォルダーが「女性」とフォルダーの数よりも多いならば、銀行管理者に女性差別が働いたと結論することができますか？

あなたは次の活動において、この関心のある疑問を探究できるでしょう。

- ・あなたは何を期待しますか？
- ・この場面をシミュレーションせよ。
- ・シミュレーション結果を分析せよ。

図3 Burrill et al. (2003)p.104における問題例

この問題では、帰無仮説「昇進で女性差別はない」に対し、対立仮説「昇進で女性差別がある」を設定する。そして、実際にシミュレーションを行い仮説を検証する中で、「仮説検定の考え方」を経験的に学習することを目的としている。

(2) Burrill et al. (2003)の教科書教材で想定される活動例

Burrill et al. (2003)では、まず男女が何人ずつ（どれくらいの割合で）昇進で推薦されたら女性差別といえるか、2次元

表を埋める作業を通して考えさせる。そして、問題場面を理解させた上で、「推薦者35人中21人が「男性」なら女性差別といえるか...※」と課題を焦点化し、シミュレーションさせる。シミュレーションはトランプを準備し、赤札24枚を「女性」、黒札24枚を「男性」とする。48枚から推薦されない13枚を取り出し、推薦された35枚の状況を調べる。各生徒は20回の実験を繰り返し、35枚中「男性」が何枚であったかのドットプロットを作成する。そして、標本分布で、その平均が17.5人付近に密集することを確認する。

その後、各生徒の標本分布に基づき、20回の実験の内、「男性」が21人以上となる結果の相対度数を求め、 $1/20=0.05(5\%)$ や $2/20=0.1(10\%)$ が減多に起こらないことかどうかを検討する。この中で、※の判定基準として5%を紹介する³⁾。最終的には、クラス全員のシミュレーション結果を合算し、※を検討する。なお、Burrill et al. (2003)pp.39-41では、5%を基準にシミュレーションの結果を判定させる際、第1種の過誤及び第2種の過誤についても補足している。

5. 考察

(1) 「仮説検定の考え方」における仮説棄却の方法の扱い

新解説数学編では、「仮説検定の考え方」の具体例の中で、仮説棄却の方法として「相対度数」に基づく方法と「標準偏差」に基づく方法の2つを紹介した。

「相対度数」に基づく方法について、新素材枕問題ではBurrill et al. (2003)のように活動を展開することが想定される。そのため、「減多に起こらないことが起こったと判断する基準」を明確にしなければ仮説を判定できない。確かに、実際の授業では生徒に判断基準を決めさせる展開も想定される。しかし、数学Bでは「信頼度95%での区間推定」及び「有意水準5%での仮説検定」を扱う。また、Burrill et al.(2003)でも、活動の解説の中で判定基準として5%を紹介した。そのため、「相対度数」に基づく方法を扱う際には、減多に起こらないことの基準として有意水準5%を用いることを明確化して単元に位置付ける必要がある。

一方、「標準偏差」に基づく方法について、新解説数学編では、「外れ値」の判定方法の1つとして紹介され、「仮説検定の考え方」でも言及された。しかし、鍋島ほか(1973)では、「標本サイズを変えた実験分布(理論分布:二項分布)」→「実験回数を変えた実験分布(理論分布:二項分布)」→「正規分布の導入(正規近似)」→「正規分布における標準偏差の性質」→...と単元を構成していた。そのため、正規分布の性質として「平均値 ± 2 標準偏差」を用いることの妥当性を

説明できた。しかし、新解説数学編では、正規分布が数学 B 内容であるため、「標準偏差」に基づく方法の妥当性は、用語「正規分布」を用いずに説明されることが想定される。そのため、データの分布が正規分布でない、あるいは、正規近似しがたい二項分布の場合でも、「標準偏差による判断」を用いることが危惧される。確かに Brill et al.(2003) のように相対度数を「仮説検定の考え方」で用いれば、分布の裾が起りにくいことが納得しやすい。しかし、「標準偏差による判断」を用いるならば、その根拠となる性質は正規分布を前提する。ゆえに、「標準偏差」に基づく方法を扱う際には、正規分布との関係を明確にした上で、単元に位置付ける必要がある。

(2) 高等学校数学科における「仮説検定の考え方」の今後の展望

表 1 より、日本では、昭和 53 年告示高等学校学習指導要領以来 30 年ぶりに数学 B で「仮説検定」を扱うだけでなく、数学 I で「仮説検定の考え方」を扱う。一方、アメリカの国家カリキュラムでは、明確に「仮説検定」に言及してはおらず、統計的有意性の概念を重視して、シミュレーションを位置付けていた。実際、Burrill et al. (2003) のように授業を展開すれば、帰無仮説や対立仮説、有意水準といった考え方を数学 I 「仮説検定の考え方」で扱うことは可能である。またドイ(2019)のようにシミュレーションソフトを用いれば、さらに授業の効率化を図ることも期待できる。

今後、新たなカリキュラムが施行される学校現場の実態を注視する必要があるが、日本でも数学 I で「仮説検定の考え方」を重視して扱う。そして、「数学 B」では「仮説検定」の代わりに確率分布や区間推定内容を充実して扱う、あるいは新たに「ブートストラップ法」等の先行研究で注目されている内容を扱うことも想定される(Wild et al., 2011)。そのため、10 年後の改訂を見据え、「仮説検定」を含めた統計的な推測内容の在り方をさらに検討するとともに、日本での動向を検証していく必要がある。

6. まとめ・今後の課題

本稿では、高等学校段階で新たに「仮説検定の考え方」を扱う上での留意点と今後の展望について示した。

今後の課題は、本留意点を授業事例と重ねて検証すること及び海外の動向を踏まえながら統計的な推測内容の在り方について検討することの 2 つである。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP19K14249 の助成を受けている。

註

- 1) 新解説数学編 p.47 では、「外れ値」の扱いについては、「外れ値は通常四分位範囲の 1.5 倍以上離れた値とされる(標準偏差 s を用いて、平均値より $\pm 2s$ (事象によっては $\pm 3s$) 以上離れた値とされることもある)」と記載している。
- 2) 鍋島ほか(1973)p.130 では、この式について「この法則は、 n が十分大きいときに成り立つものであるが、取り扱いを簡単にするために、 n が 10 個程度の場合についても用いることにする」と補足している。
- 3) 実際には、35 人中 21 人以上が男性である確率は、 $p = {}_{35}C_{21}(1/2)^{21}(1/2)^{14} + \dots + {}_{35}C_{35}(1/2)^{35}(1/2)^0 \approx 0.155$ となる。

引用・参考文献

- Benson Rosen, Thomas H. Jerdee(1974). Influence of Sex-Role Stereotypes on Personnel Decisions. Journal of Applied Psychology, 59(1), 9-14.
- CCSSI(2010a). COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS. <http://www.corestandards.org/Math/>
- CCSSI(2010b). COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS Appendix A. <http://www.corestandards.org/Math/>
- Gail Burrill, Christine A. Frankin, Landy Godbold, Linda J. Young(2003). Navigating through Data Analysis in Grades 9-12. National Council of Teachers of mathematics, 29-41, 104-112.
- ジミー・ドイ(2019). シミュレーションに基づく統計的推論とアクティブ・ラーニングの授業事例. 日本数学教育学会誌 101(3), 28-39.
- 国立政策研究所(2019). 学習指導要領データベース. <https://www.nier.go.jp/guideline/>
- 文部科学省(2019). 高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説数学編理数編. 学校図書.
- 鍋島信太郎, 柴垣和三雄, 森嶋太郎, 野崎正雄, 内田虎雄ほか 8 名(1973). 高等学校 数学一般. 池田書店.
- 高橋昭彦(2012). 米国における統一カリキュラムへの模索—Common Core State Standards—. 日本数学教育学会誌 94(1), 19-22.
- Wild, C.J., Pfannkuch, M., Regan, M., Horton, N.J.(2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics Society) 174(2), 247-295.

(上記 URL はすべて 2020 年 1 月 17 日現在)